



КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ
 L_2 СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ-ЗЕМЛЯ И ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЁТА К НИМ
В РОССИЙСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ПРОЕКТАХ

И.С. ИЛЬИН

РУКОВОДИТЕЛЬ Д.Ф.-М.Н. А.Г. ТУЧИН

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

19 мая 2015 г

СТРУКТУРА ДОКЛАДА

- Актуальность выбранной темы
- Краткий обзор существующих методов построения периодических и квазипериодических орбит в окрестности точки L_2 в рамках задачи трёх тел
- Построение начального приближения для траекторий перелёта с помощью метода изолиний в рамках задачи трёх тел
- Построение траекторий перелёта в эфемеридной модели Солнечной системы
- Поддержание квазипериодической орбиты с помощью коррекций
- Окна старта для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон»
- Коррекции на траектории перелёта, оценка затрат характеристической скорости на коррекции поддержания квазипериодической орбиты с учётом ошибок исполнения манёвров
- Положения, выносимые на защиту

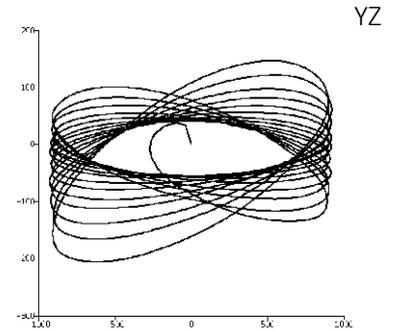
КОСМИЧЕСКИЕ ТЕЛЕСКОПЫ В ОКРЕСТНОСТИ ЛИБРАЦИОННОЙ ТОЧКИ L_2



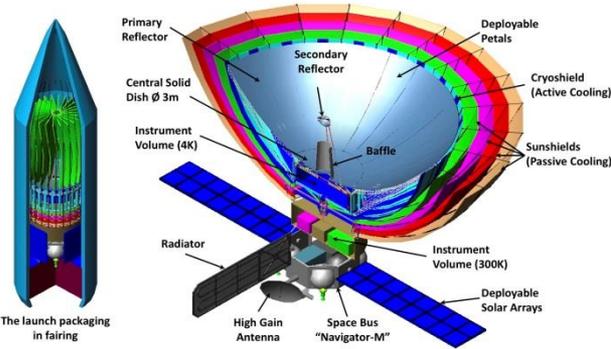
Космический телескоп “Спектр-РГ”

Дата старта: запланирована на середину 2017 г
прямой перелёт на квазипериодическую орбиту малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля

Научные задачи: сканирование пространства в рентгеновском и гамма диапазонах, исследование возможности навигации по рентгеновским лучам



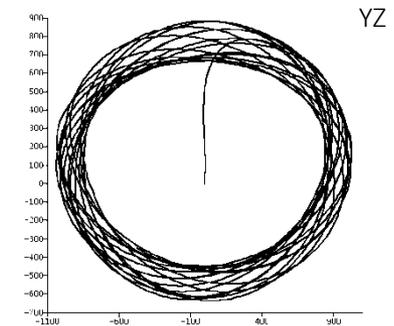
Conceptual configuration



Космический телескоп “Миллиметрон”

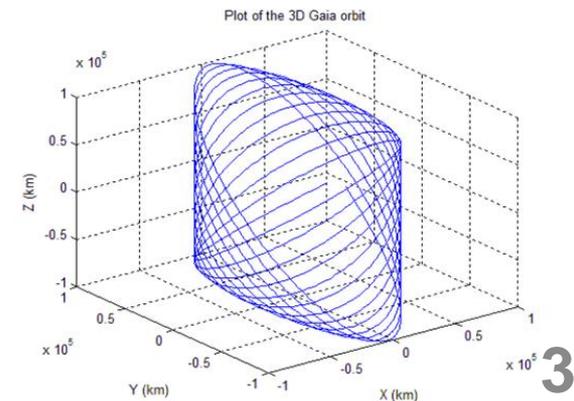
Дата старта: запланирована на 2019-2023 г
прямой перелёт на квази гало-орбиту с большим выходом из плоскости эклиптики в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля

Научные задачи : сканирование пространства в миллиметровом, субмиллиметровом и инфракрасном диапазонах. Двенадцатиметровое зеркало телескопа будет охлаждаться до 4K для обеспечения уникальной чувствительности.



Космический телескоп “Gaia” ЕКА

дата старта 19.12.2013,
прямой перелёт на орбиту Лиссажу в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля



СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ЗАДАЧЕ ТРЁХ ТЕЛ

1. **Линеаризация уравнений движения** задачи трех тел в окрестности точки L_2 позволяет найти собственные значения матрицы системы

$$\Delta x'' - 2y' - (2a + 1)\Delta x = 0$$

$$\lambda_{xy}^4 - \lambda_{xy}^2(a - 2) - (2a + 1)(a - 1) = 0$$

$$y'' + 2\Delta x' + (a - 1)y = 0$$

$$\lambda_z^2 + a = 0$$

$$z'' + az = 0$$

$$\lambda_{xy} = \pm \lambda, \pm i\omega_1, \text{ где } \lambda > 0, \omega_1 > 0,$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\lambda_z = \pm i\omega_2, \text{ где } \omega_2 > 0$$

$$a = \frac{\mu}{x_0^3} + \frac{1 - \mu}{(1 + x_0)^3}$$

2. В линейном приближении точка либрации L_2 является особой точкой типа **центр** \times **центр** \times **седло**.

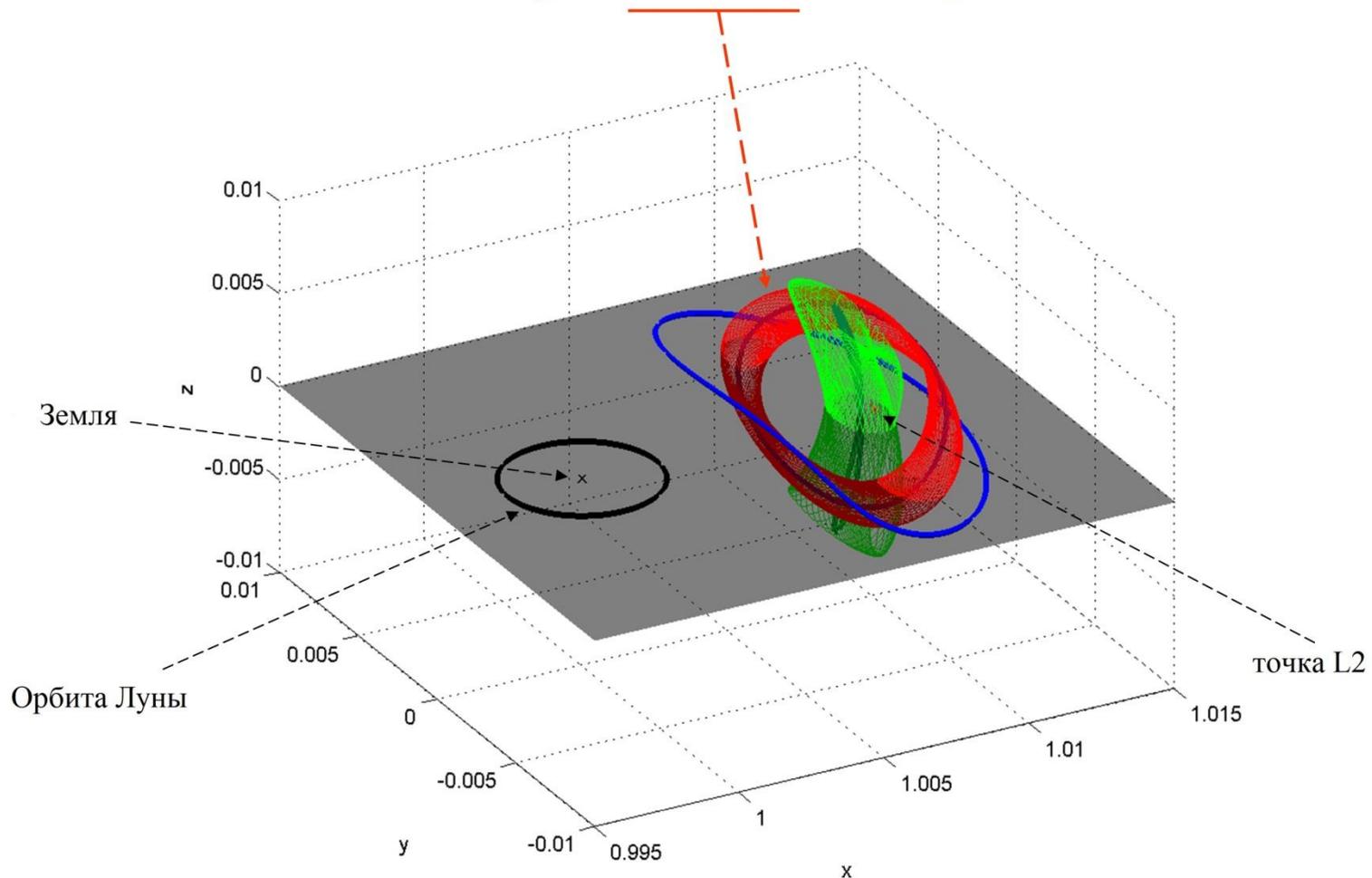
$$\pm i\omega_1 \quad \pm i\omega_2 \quad \pm \lambda$$

3. **Теорема Ляпунова:** пусть гладкая система вида $\dot{x} = f(x)$ имеет стационарное решение $x = 0$ и первый интеграл $H(x) = x^T W x + \dots$, матрица $f_x(0)$ имеет пару собственных чисел $\pm i\omega$, $\omega > 0$, а остальные её собственные числа не равны $\pm ki\omega > 0$ при любом целом k ; нетривиальные $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодические решения линеаризованной системы $\dot{y} = f_x(0)y$ удовлетворяют условию $y^T W y > 0$. Тогда в окрестности точки $x = 0$ существует двухпараметрическое семейство периодических решений исходной системы $x(t + \alpha, c)$ с параметрами α и c , $H[x(t + \alpha, c)] = c^2$ и периодом

$$T(c) = \frac{2\pi}{\omega} + O(c^2)$$

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L_2

Квазипериодическая гало-орбита



МЕТОДЫ РАСЧЁТА ПЕРИОДИЧЕСКИХ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ

Решение системы линеаризованных уравнений, описывающих динамику ограниченной круговой задачи трёх тел в окрестности точки L_2

$$x = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C e^{\lambda t} + D e^{-\lambda t}$$

$$y = -k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (C e^{\lambda t} - D e^{-\lambda t})$$

$$z = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

Частные решения:

$$w_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$w_2 = D \begin{pmatrix} 1 \\ -k_1 \end{pmatrix} e^{-\lambda t}$$

Метод Линдштедта-Пуанкаре

Позволяет получить аналитическую аппроксимацию решения с учётом нелинейных поправок. При расчёте аппроксимации для периодических гало-орбит накладывается связь на значения амплитуд A и B

$$x = a_{21} A^2 + a_{22} B^2 - A \cos \tau + (a_{23} A^2 - a_{24} B^2) \cos 2\tau + (a_{31} A^3 - a_{32} A B^2) \cos 3\tau$$

$$y = k A \sin \tau + (b_{21} A^2 - b_{22} B^2) \sin 2\tau + (b_{31} A^3 - b_{32} A B^2) \sin 3\tau$$

$$z = B \cos \tau + d_{21} A B (\cos 2\tau - 3) + \delta_n (d_{32} A^2 B - d_{31} B^2) \cos 3\tau$$

$$\tau = \omega t + \varphi$$

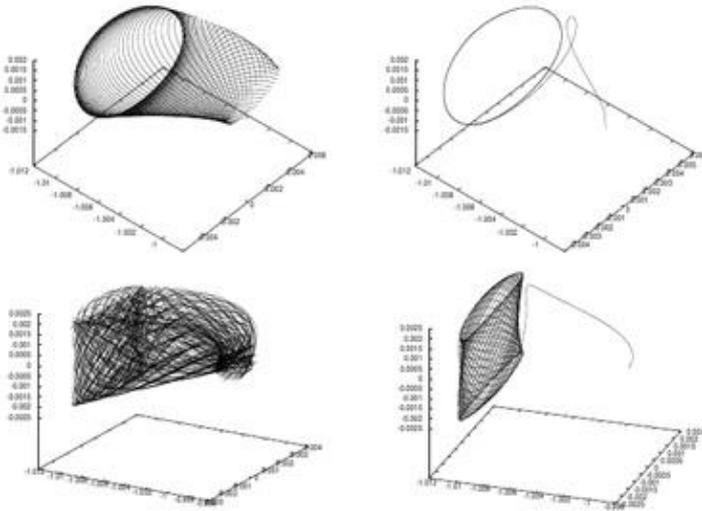
$$\Delta = l_1 A^2 + l_2 B^2$$

$$\omega = 1 + \sum_{n \geq 1} \omega_n, \quad \omega_n < 1$$

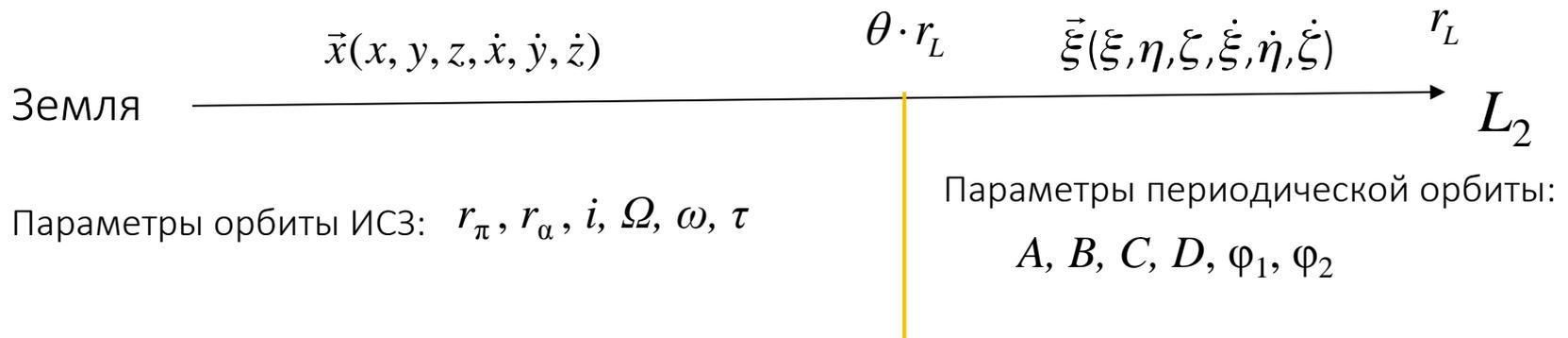
$$\Delta = a - \omega^2$$

$$\Delta = O(B^2)$$

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЁТА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИЗОЛИНИЙ



Траектория перелёта на выбранную периодическую орбиту ищется на устойчивом инвариантном многообразии задачи трех тел с помощью варианта метода продолжения по параметру, впервые предложенного М.Л. Лидовым. Этот метод позволяет связать параметры периодической орбиты с параметрами геоцентрической перелётной траектории – строятся изолинии функции высоты перицентра от параметров периодического решения. Метод позволяет осуществить одноимпульсный переход на периодическую орбиту.



Одноимпульсные траектории перелёта выделяются условием: $r_\pi = r_\pi^*$

При фиксированных A, B и $C = 0$ изолиния строится в плоскости φ_1, φ_2 $r_\pi(\varphi_1, \varphi_2) = r_\pi^*$

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ИЗОЛИНИИ

1. Поиск функции высоты перицентра $f(\theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2)$ согласно следующему алгоритму:

- Вычисляется вектор состояния КА в инерциальной СК, полученной фиксацией осей вращающейся СК на фиксированный момент времени в зависимости от параметров: A, B, φ_1 и φ_2 .

$$D = r_L + x_1^* - A \cos \varphi_1$$

$$\xi_1 = r_L + x_1^*$$

$$\xi_2 = -k_2 A \sin \varphi_1 - k_1 D$$

$$\xi_3 = B \cos \varphi_2$$

$$\dot{\xi}_1 = -\omega_1 A \sin \varphi_1 - \lambda D$$

$$\dot{\xi}_2 = -k_2 \omega_1 A \cos \varphi_1 + k_1 \lambda D$$

$$\dot{\xi}_3 = -\omega_2 B \sin \varphi_2$$

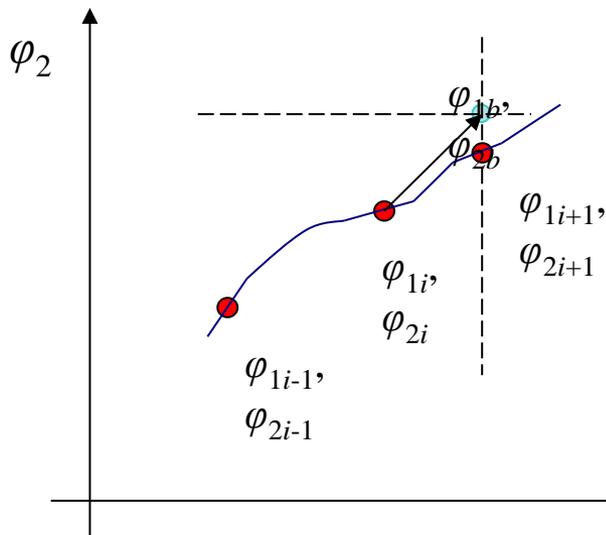
- Полученный вектор преобразуется в невращающуюся геоцентрическую эллиптическую СК
- По полученному вектору вычисляются элементы орбиты и в том числе расстояние перицентра r_π

2. Поиск начальной точки изолинии – выполняется сканированием по φ_1, φ_2

$$(r_\pi(\varphi_1 - 1^\circ, \varphi_2) - r_\pi^*) \cdot (r_\pi(\varphi_1, \varphi_2) - r_\pi^*) \leq 0$$

$$\text{Уточнение: } |r_\pi(\varphi_{1m}, \varphi_2) - r_\pi^*| < \varepsilon$$

3. Поиск следующей точки изолинии – выполняется смещение на шаг s , затем координаты $\varphi_{1i+1}, \varphi_{2i+1}$ уточняются



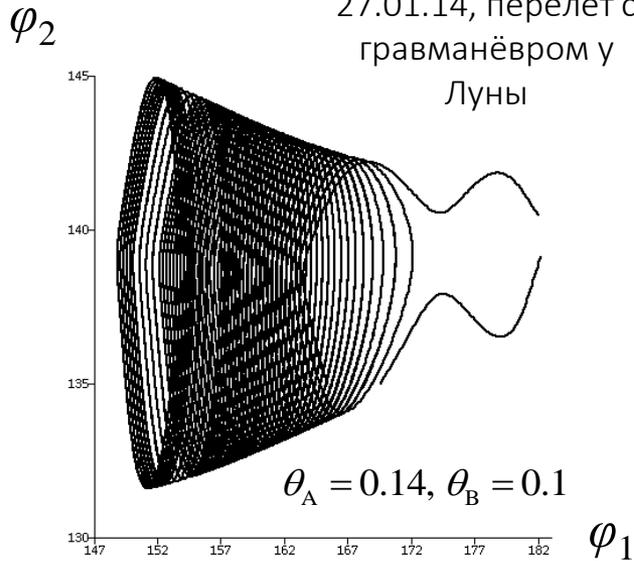
$$s = \begin{cases} h, & \text{если } i = 1; \\ \frac{h}{\sqrt{(\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1})^2 + (\varphi_{2i} - \varphi_{2i-1})^2}}, & \text{если } i > 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{1b} = \varphi_{1i} + s,$$

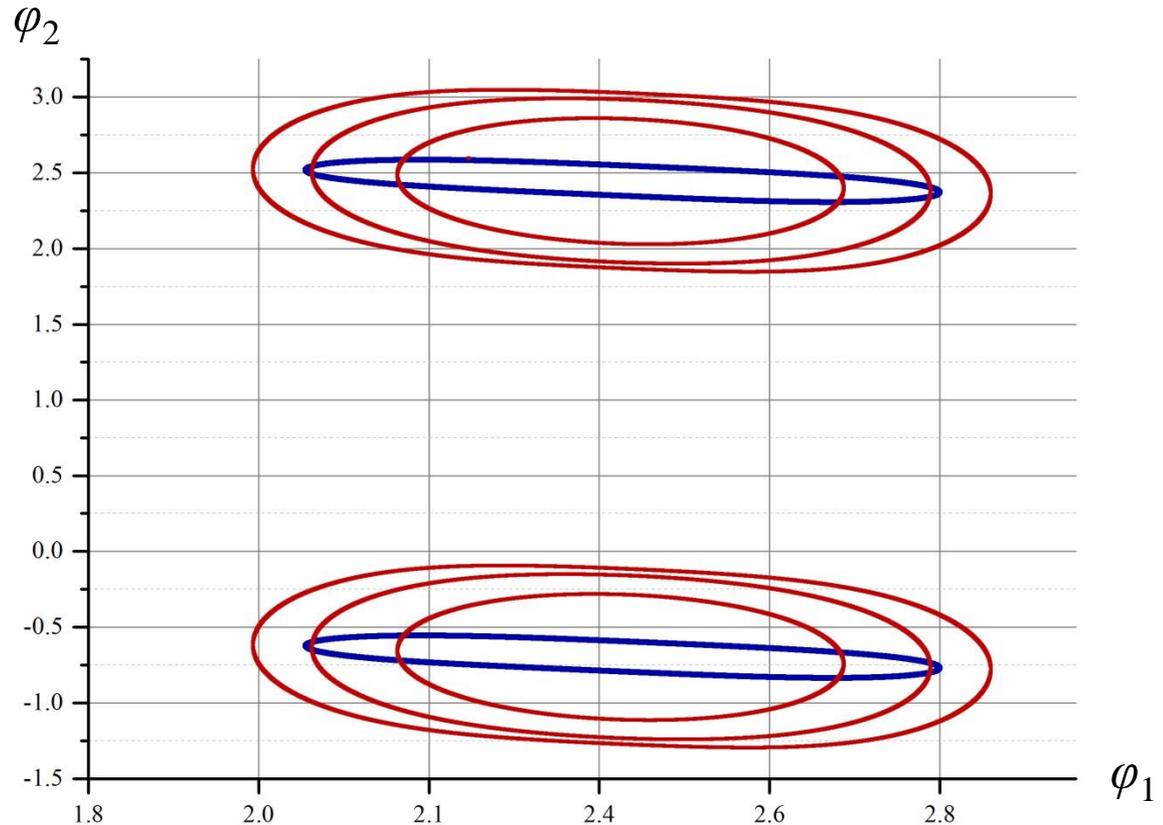
$$\varphi_{2b} = \varphi_{2i} + s,$$

ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕННЫХ ИЗОЛИНИЙ

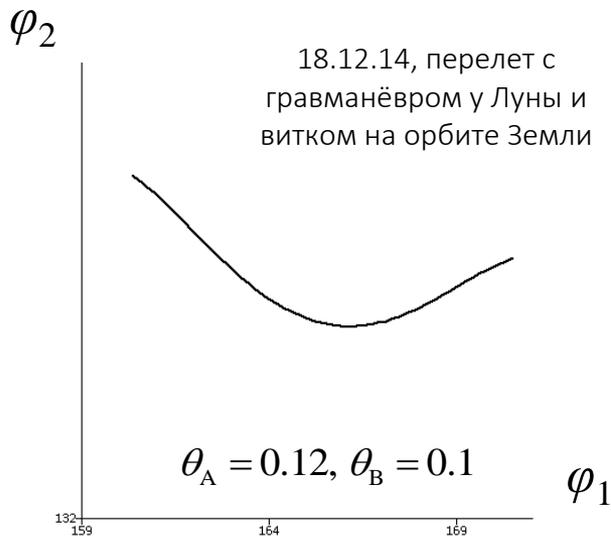
27.01.14, перелет с гравманёвром у Луны



Изолинии для перелета без гравитационного манёвра у Луны, Спектр-РГ и Миллиметрон



18.12.14, перелет с гравманёвром у Луны и витком на орбите Земли



$$\theta_A = 0.18, \theta_B = 0.1524$$

$$\theta_A = 0.19, \theta_B = 0.1538$$

$$\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.1552$$

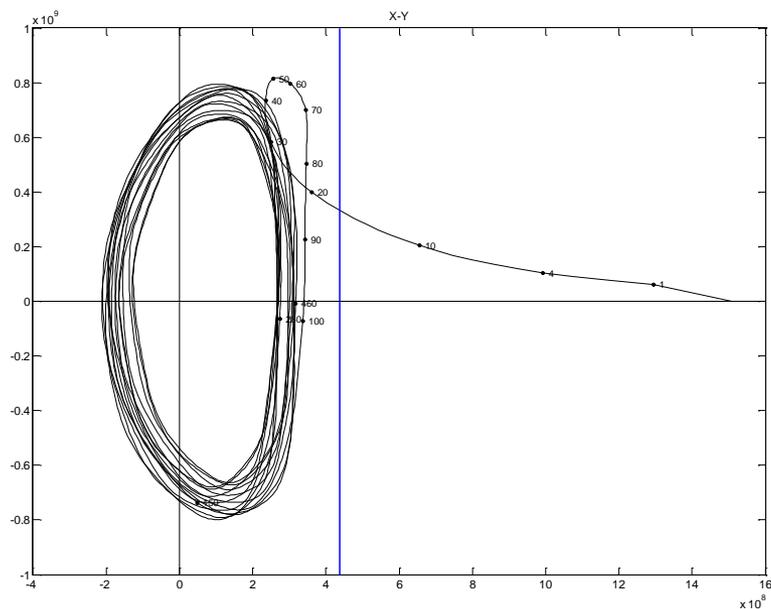
$$\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.8500$$

$$\theta_A = \frac{A}{r_L} \quad \theta_B = \frac{B}{r_L} \quad \theta_C = \frac{C}{r_L}$$

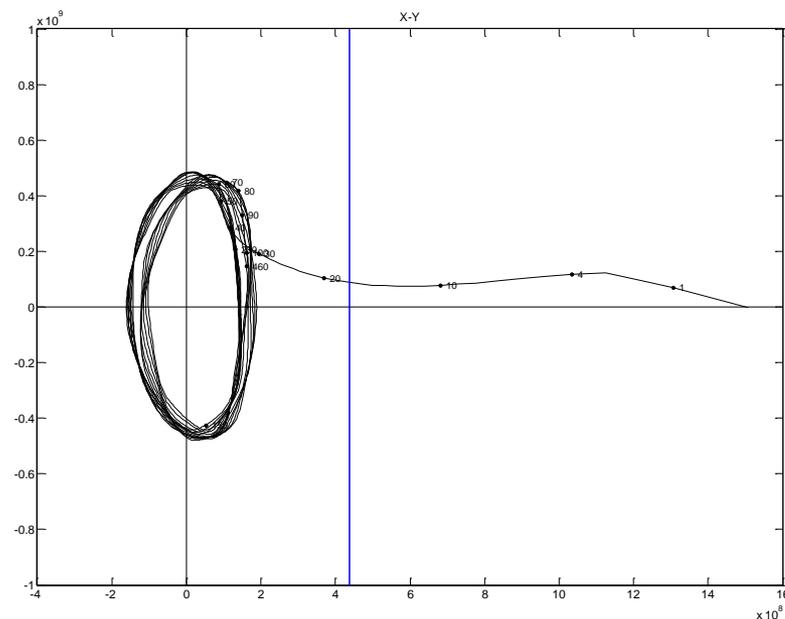
МЕТОД ИЗОЛИНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЁТА С ГРАВИТАЦИОННЫМ МАНЕВРОМ У ЛУНЫ

Преимущества: Гравитационный маневр у Луны позволяет выйти на более компактную орбиту

Недостатки: Перелёт возможен 1 раз в месяц, исправление ошибок исполнения гравитационного манёвра может потребовать больших затрат характеристической скорости



Квазипериодическая орбита, переход на которую осуществлен без гравитационного манёвра у Луны
 $A_y = 0.8$ млн км



Квазипериодическая орбита, переход на которую осуществлен с гравитационным манёвром у Луны
 $A_y = 0.5$ млн км

Проекция орбиты на плоскость XY вращающейся СК, млн км.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ

В полной баллистической модели Солнечной системы, используемой для прикладных баллистико-навигационных задачи в БЦ ИПМ движение КА описывается с помощью численного интегрирования его уравнений движения, учитывающих возмущения, вызванные гравитационным воздействием Солнца и планет Солнечной системы, Луны, нецентральностью гравитационного поля Земли, силами светового давления, а также воздействием атмосферы Земли.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_3 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \sum_i \mathbf{f}_i + \mathbf{A}_{\text{Гринв}}^{\text{J2000}} (\mathbf{f}_{\text{Гринв}}^{\text{грав}} + \mathbf{f}_{\text{атм}}) + \mathbf{f}_{\text{рад}}$$

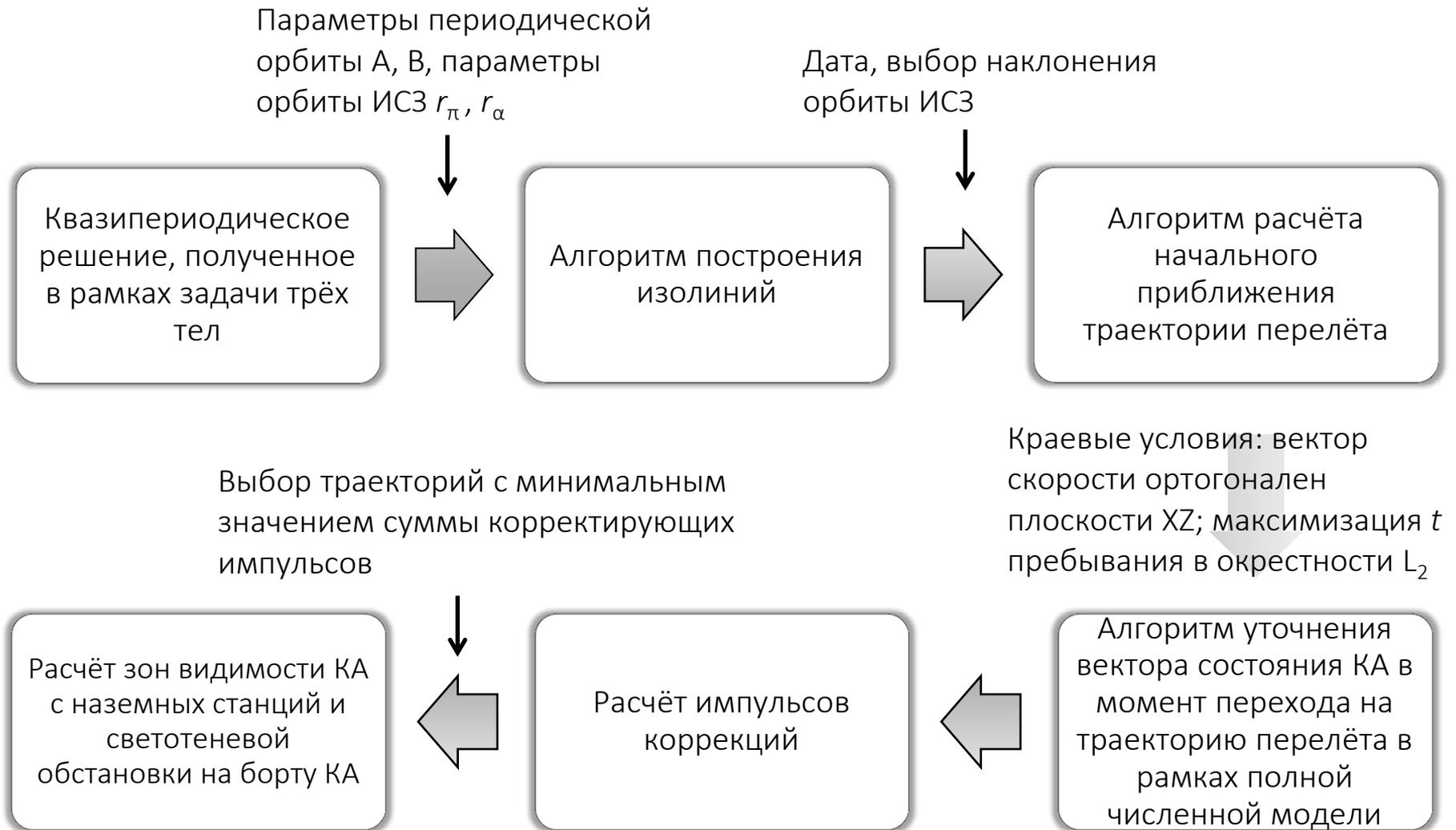
$$\mathbf{f}_i = \mu_i \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right)$$

$$U = -\frac{\mu_3}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi) \right]$$

$$\mathbf{f}_{\text{атм}} = -\mathbf{v} \frac{\rho \cdot S_{\sigma} \cdot |\mathbf{v}|}{g}$$

$$\mathbf{f}_{\text{рад}} = \mathbf{F} \frac{S}{m} a_e^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_c}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^3}$$

СТРУКТУРА АЛГОРИТМА РАСЧЁТА ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЁТА НА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКУЮ ОРБИТУ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L_2



РАСЧЁТ ИМПУЛЬСОВ КОРРЕКЦИЙ

Вектор импульса коррекции рассчитывается из условия максимального времени нахождения КА в окрестности точки L_2 заданного радиуса после исполнения коррекции. Максимум времени ищется с помощью градиентного метода.

$$\Delta \vec{V}_k = \frac{\Delta V_{\max}}{|\text{grad}F|} (\text{grad}F)^\top; \quad k \in [1, \dots, n-j] \quad \Delta V_{\max} \text{ - Наибольшее возможное значение импульса}$$

$$\Delta \vec{V}_q = \frac{1}{2^q} \frac{\Delta V_{\max}}{|\text{grad}F|} (\text{grad}F)^\top; \quad q \in [1, \dots, j] \quad k \text{ - число шагов в направлении, минимизирующем функционал, до входа в цикл сокращения шага}$$

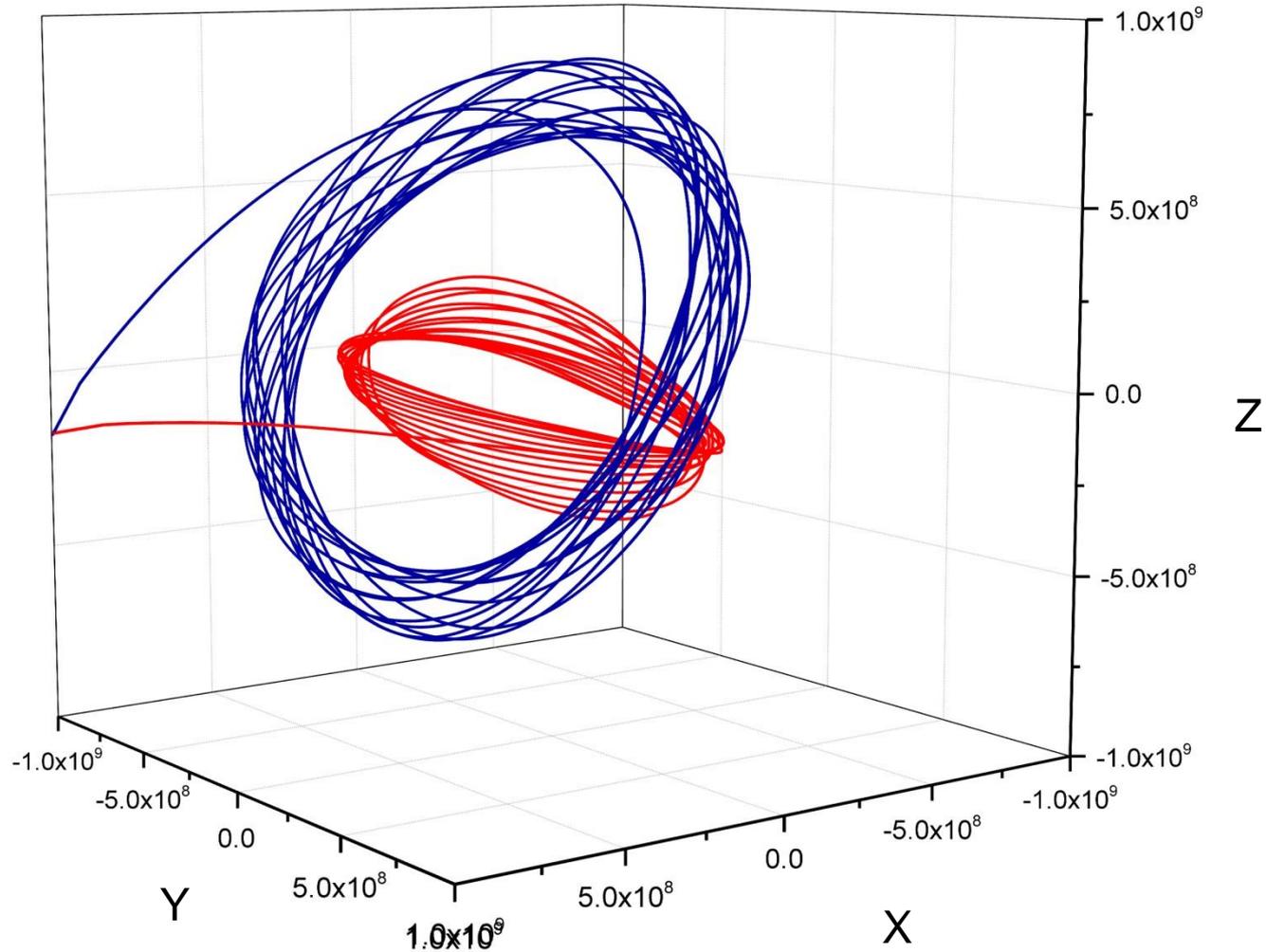
$$\Delta \vec{V}_i = \sum_{n-j} \Delta V_k + \sum_j \Delta V_q \quad q \text{ - коэффициент, контролирующий сокращение шага - счетчик цикла сокращения шага}$$

$$F_C(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} C(t)^2 dt \quad i \text{ - номер корректирующего импульса}$$

$$F_{BC}(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \left((B(t) - \theta_B r_L)^2 + C(t)^2 \right) dt$$

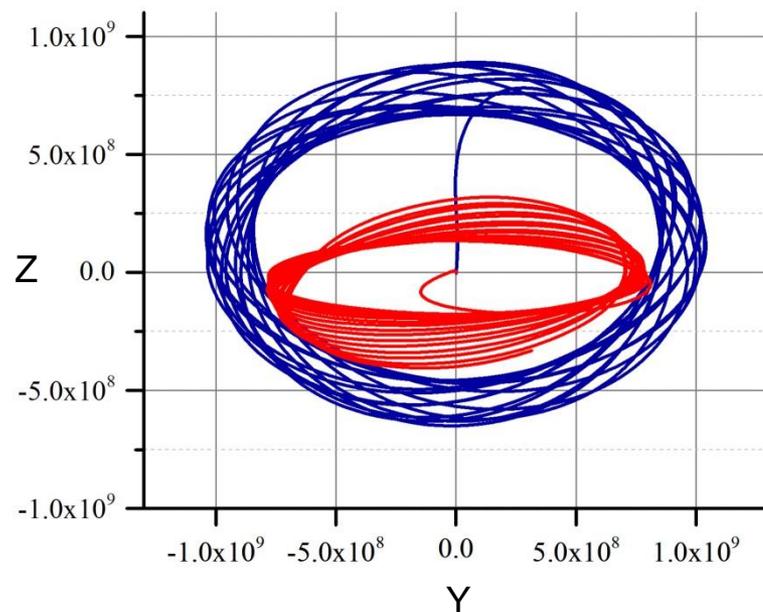
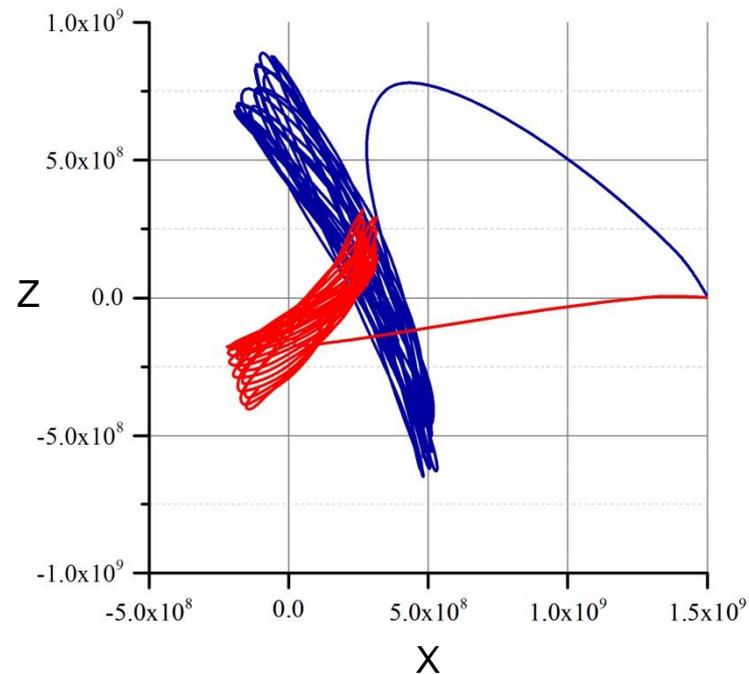
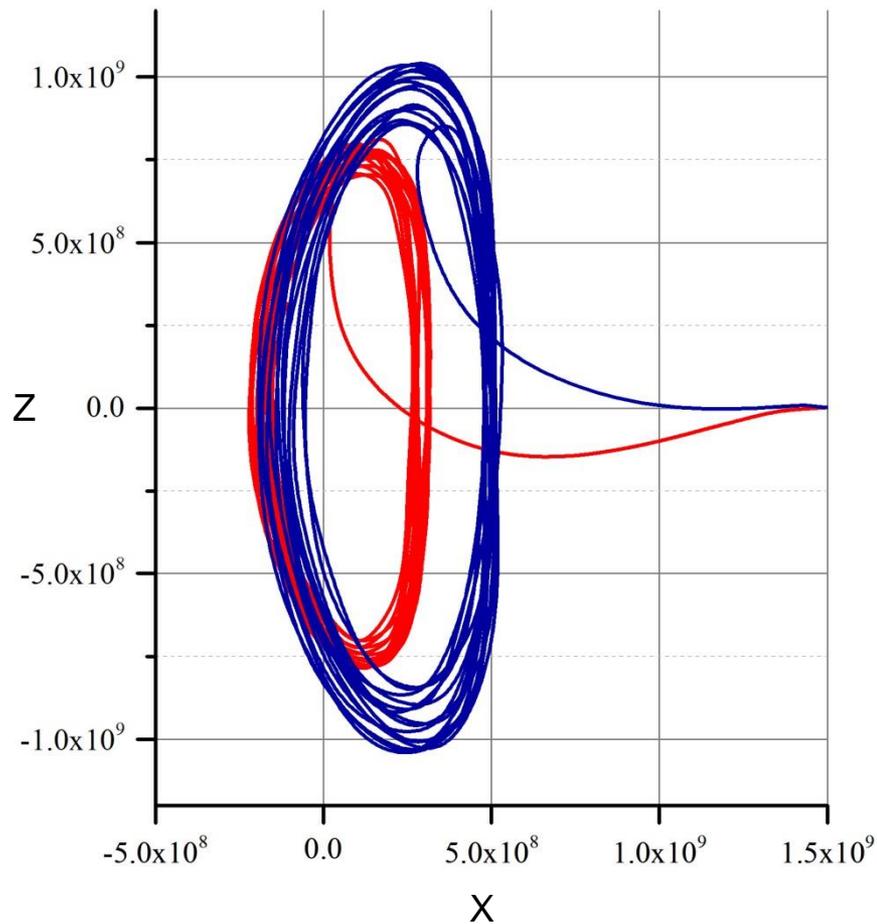
$$F_T(v_x, v_y, v_z) = -(t_{\text{out}L2} - t_{\text{in}L2})$$

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ, РАССЧИТАННЫЕ ДЛЯ МИССИЙ «СПЕКТР-РГ» И «МИЛЛИМЕТРОН»



Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание орбиты составляют 5 м/с для орбиты КА «Спектр-РГ» и 20 м/с для орбиты КА «Спектр-М» за 7 лет

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ, РАССЧИТАННЫЕ ДЛЯ МИССИЙ «СПЕКТР-РГ» И «МИЛЛИМЕТРОН»

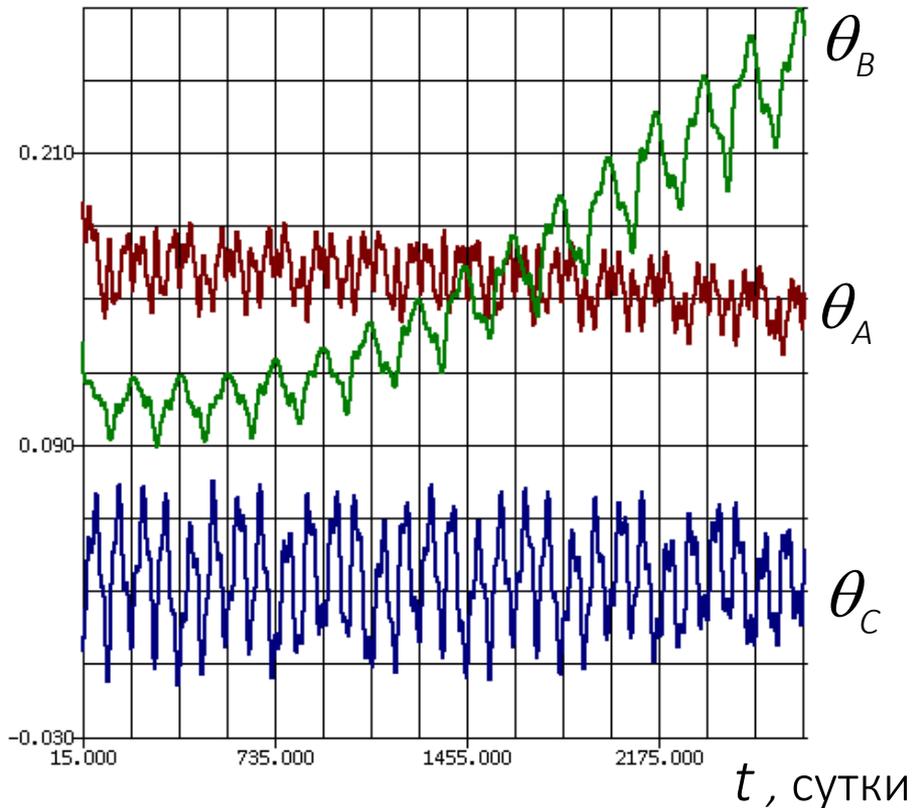


Проекции на плоскости XY, XZ и YZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность - м

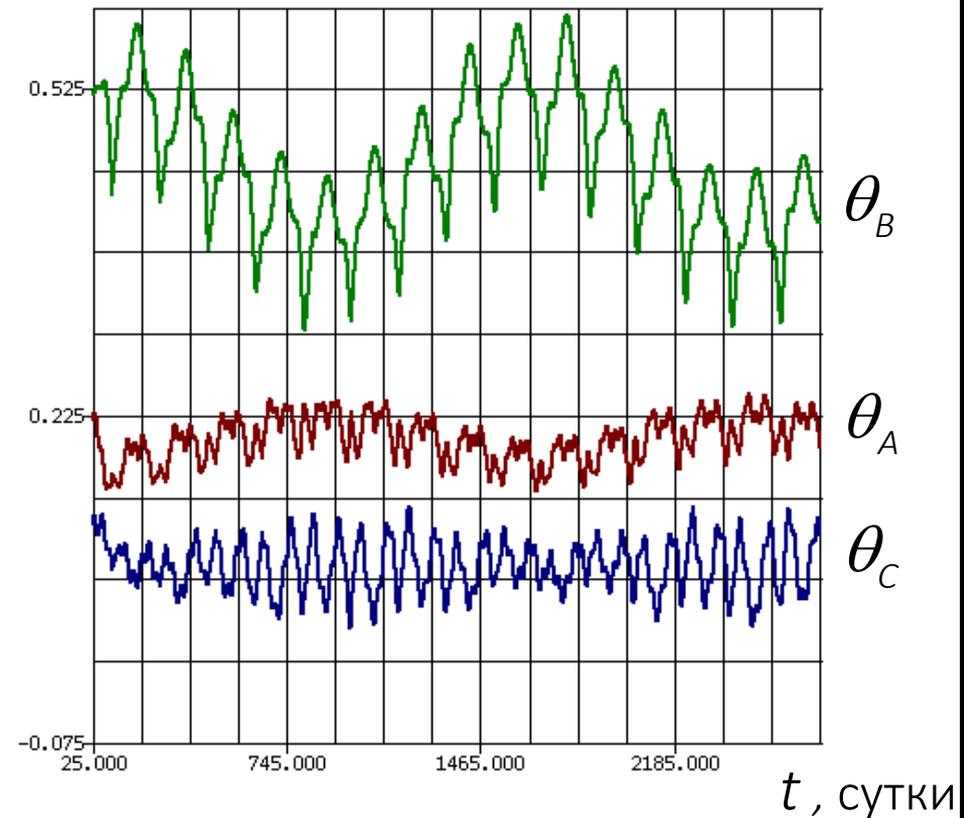
ЭВОЛЮЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОРРЕКЦИЯХ ТРАЕКТОРИИ

$$\theta_A = \frac{A}{r_L} \quad \theta_B = \frac{B}{r_L} \quad \theta_C = \frac{C}{r_L}$$

Спектр-РГ

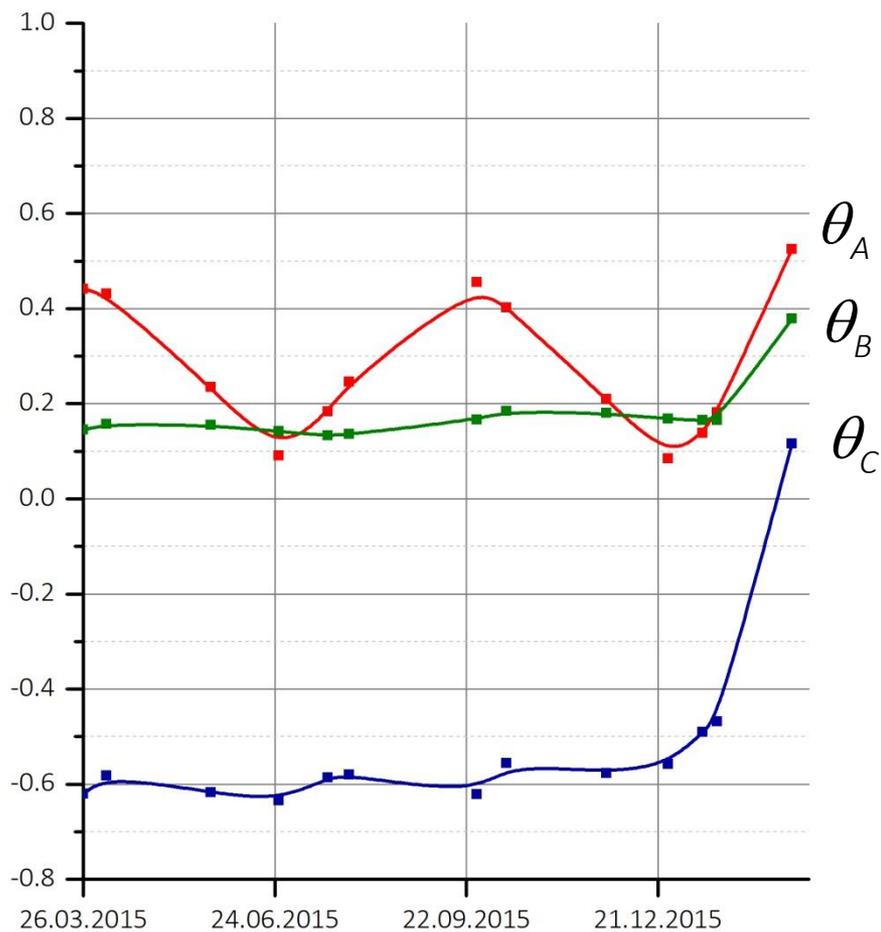


Миллиметр

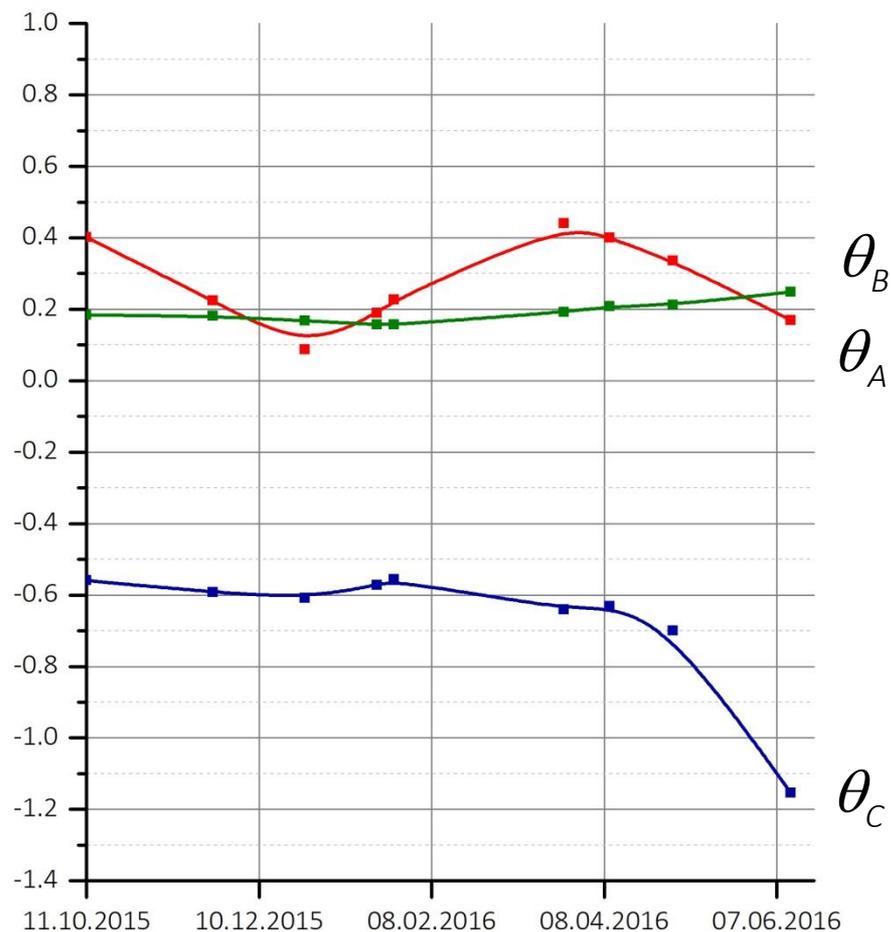


ЭВОЛЮЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ В ОТСУТСТВИЕ КОРРЕКЦИЙ ТРАЕКТОРИИ

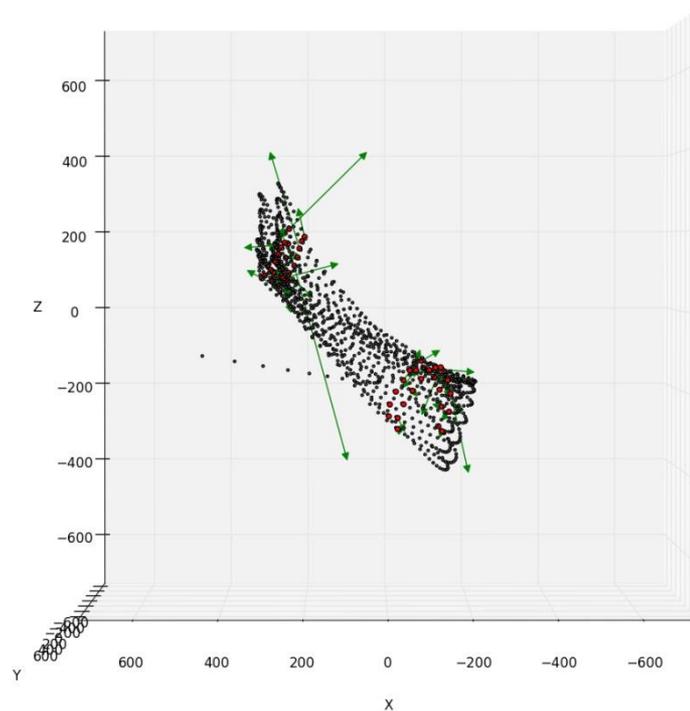
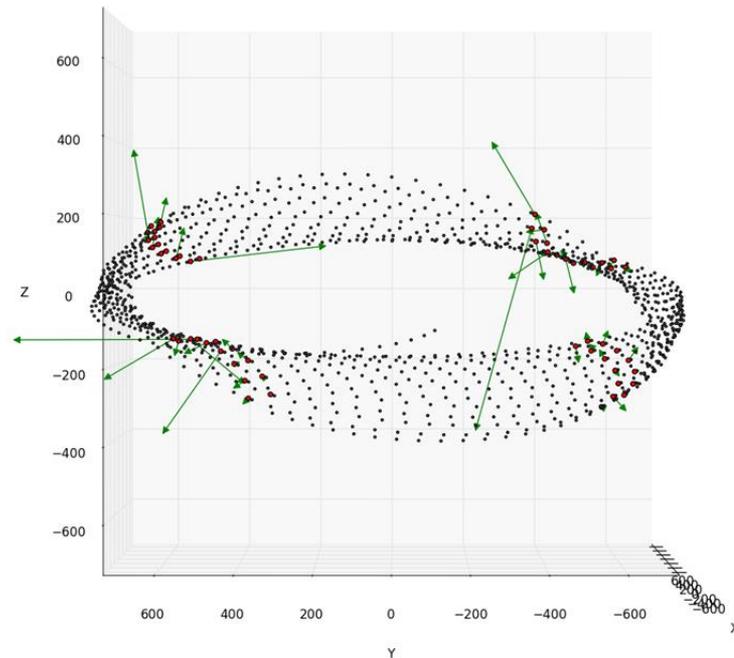
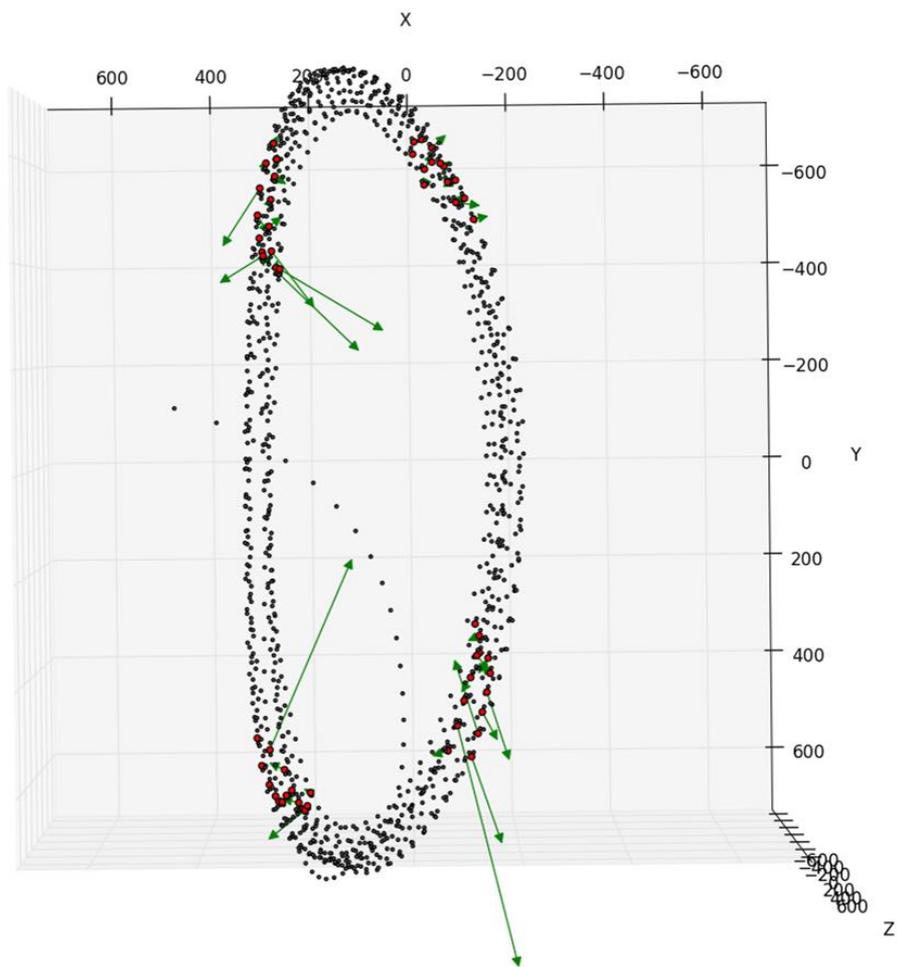
Спектр-РГ



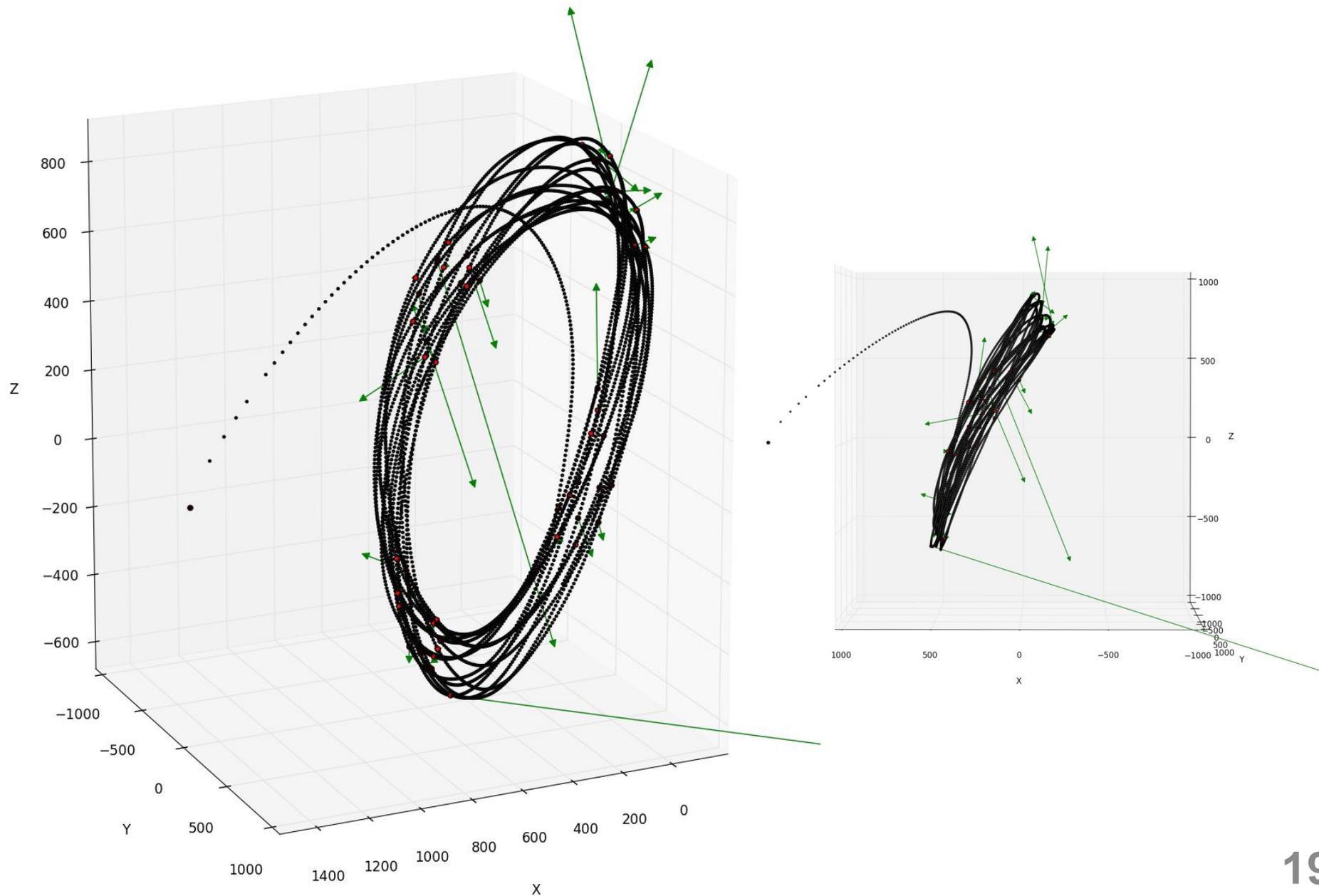
Миллиметр



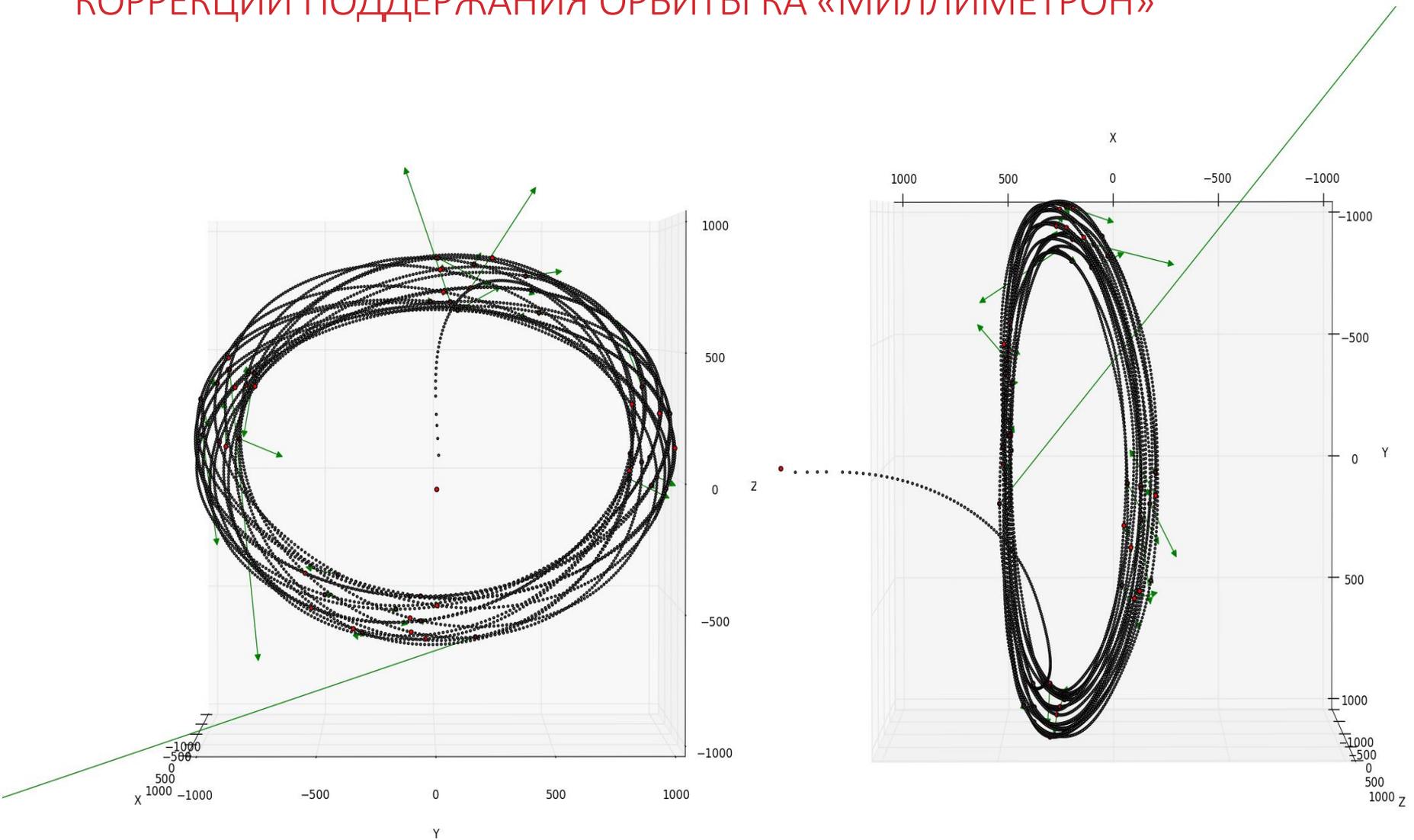
КОРРЕКЦИИ ПОДДЕРЖАНИЯ ОРБИТЫ КА «СПЕКТР-РГ»



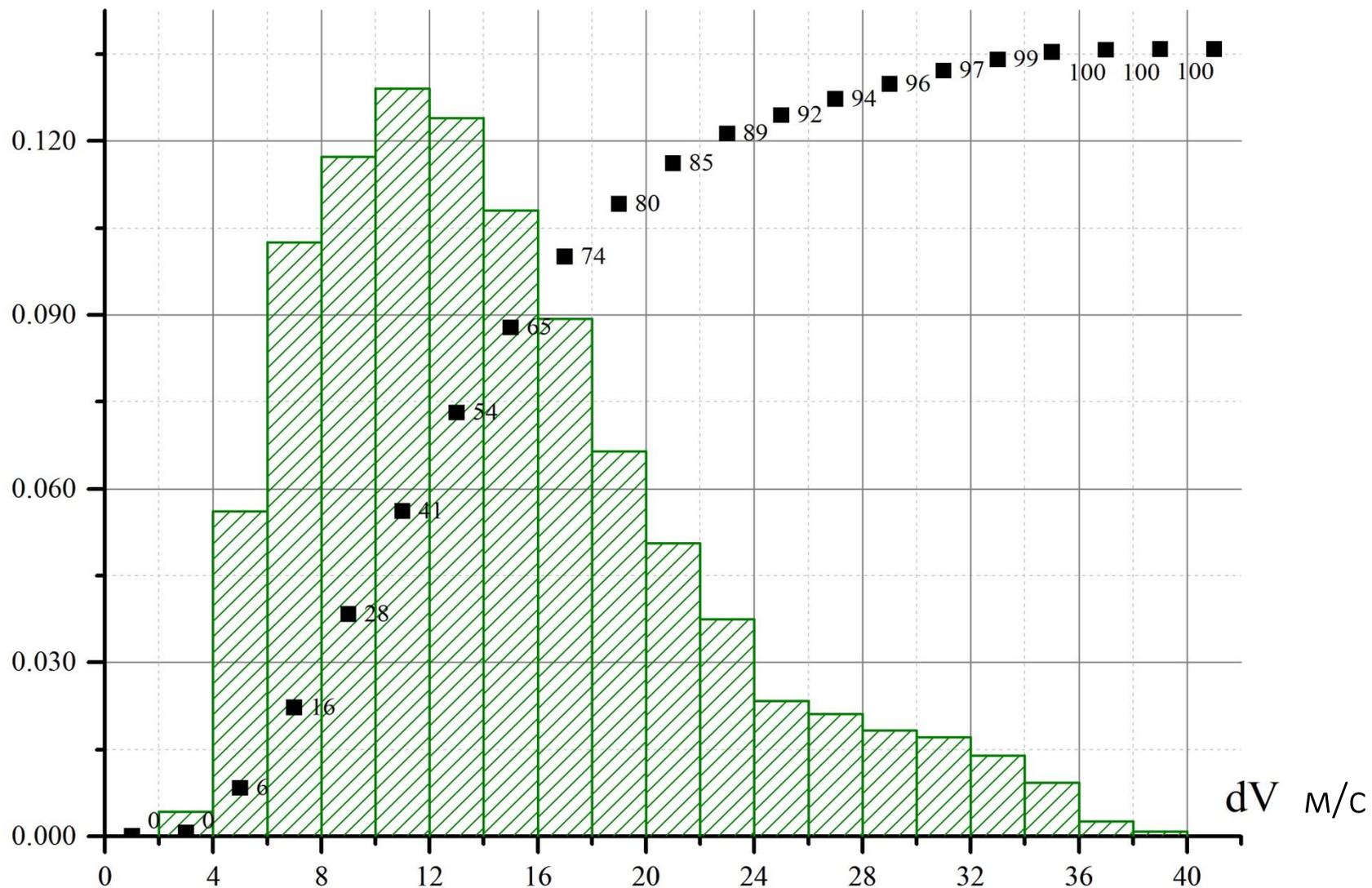
КОРРЕКЦИИ ПОДДЕРЖАНИЯ ОРБИТЫ КА «МИЛЛИМЕТРОН»



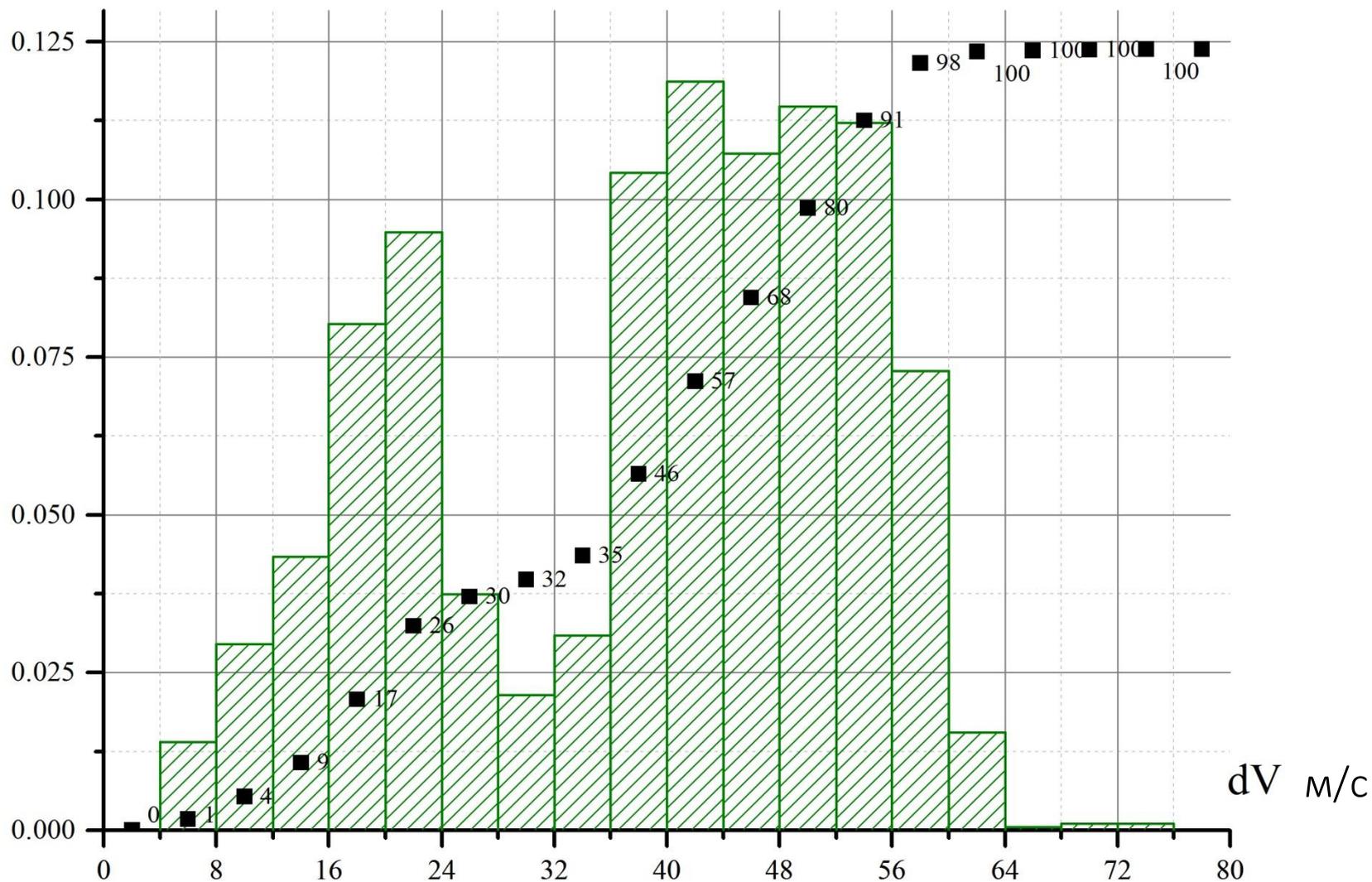
КОРРЕКЦИИ ПОДДЕРЖАНИЯ ОРБИТЫ КА «МИЛЛИМЕТРОН»



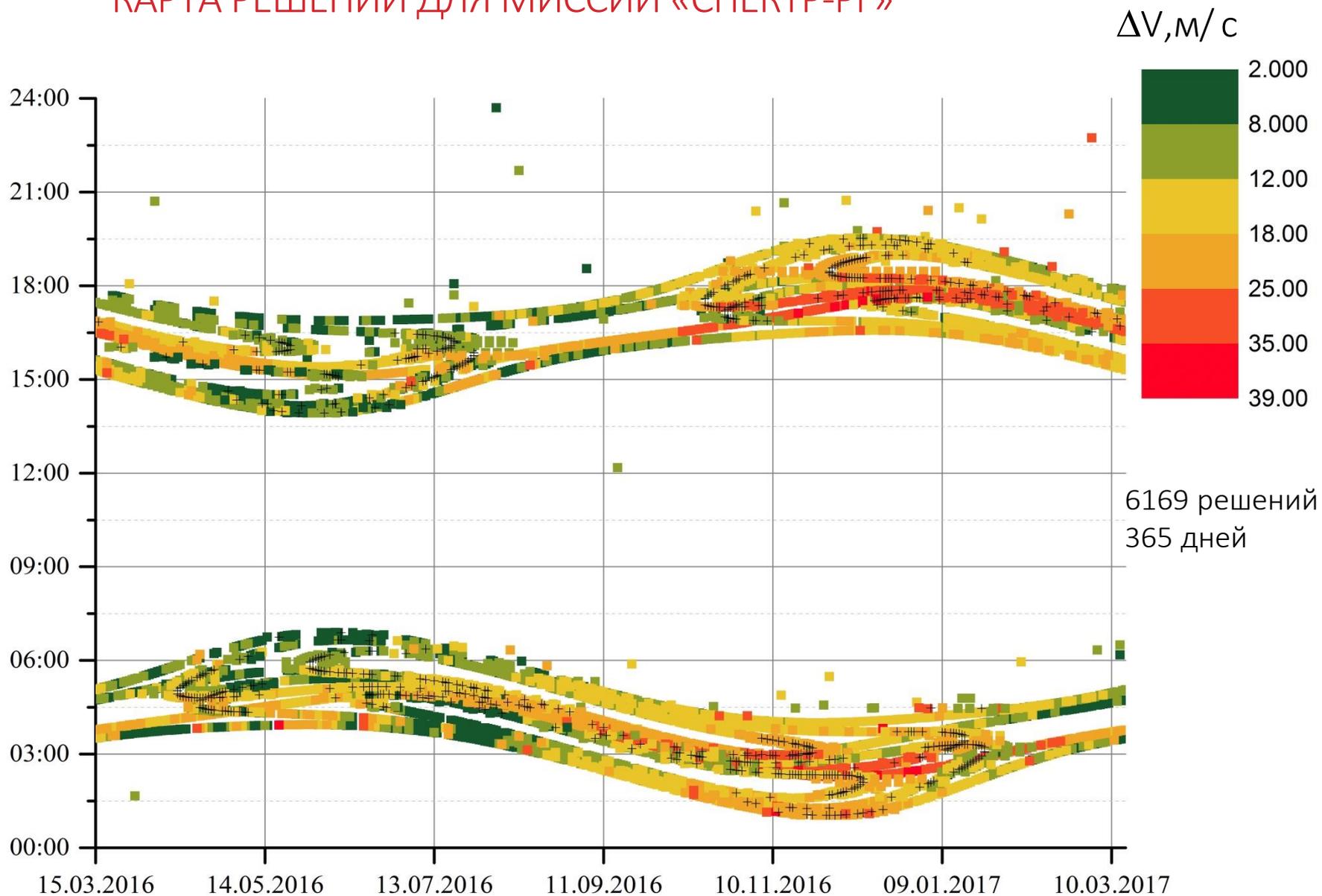
ГИСТОГРАММА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММАРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПУЛЬСОВ ПОДДЕРЖАНИЯ ОРБИТЫ ДЛЯ МИССИИ «СПЕКТР-РГ»



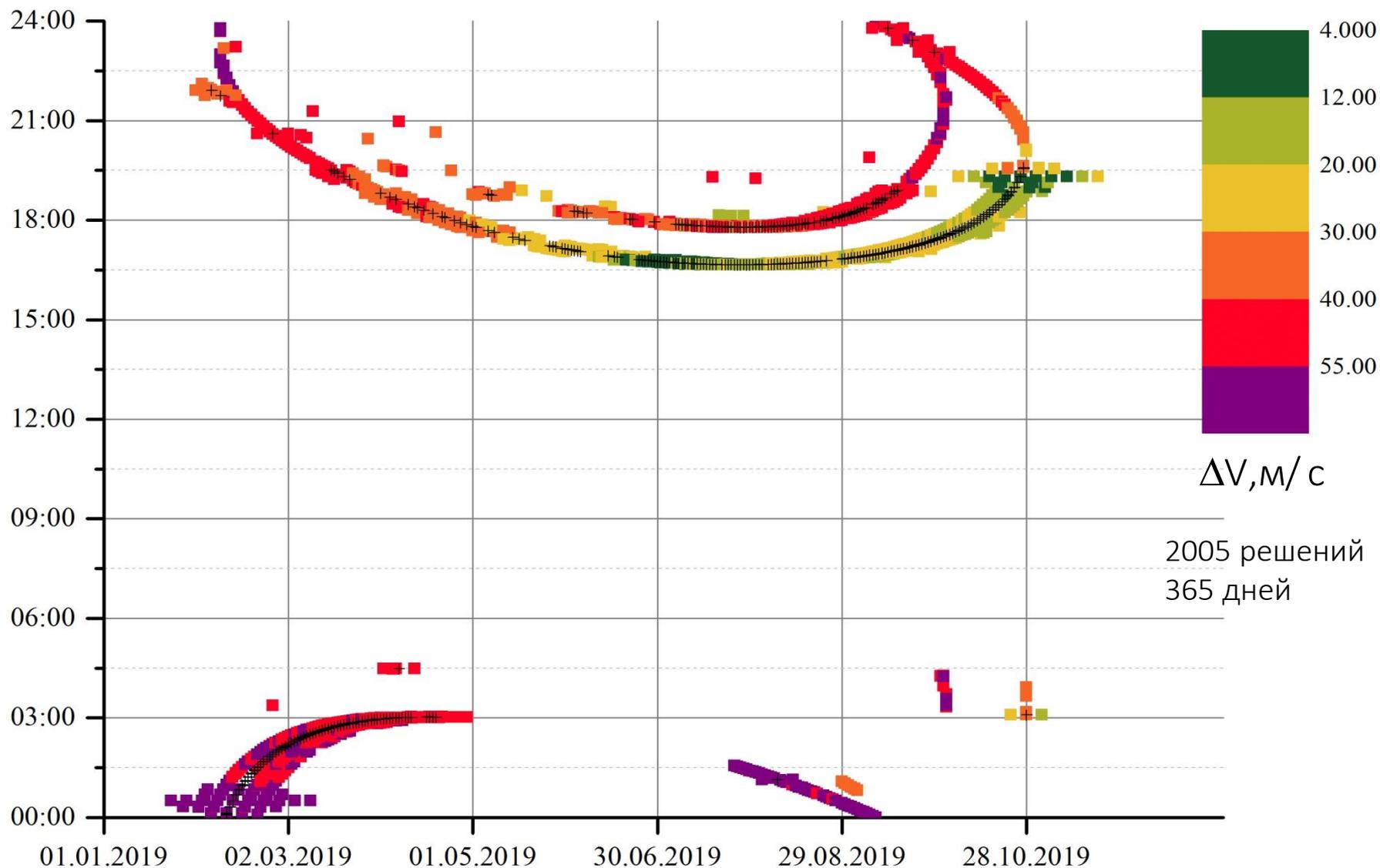
ГИСТОГРАММА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММАРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПУЛЬСОВ ПОДДЕРЖАНИЯ ОРБИТЫ ДЛЯ МИССИИ «МИЛЛИМЕТРОН»



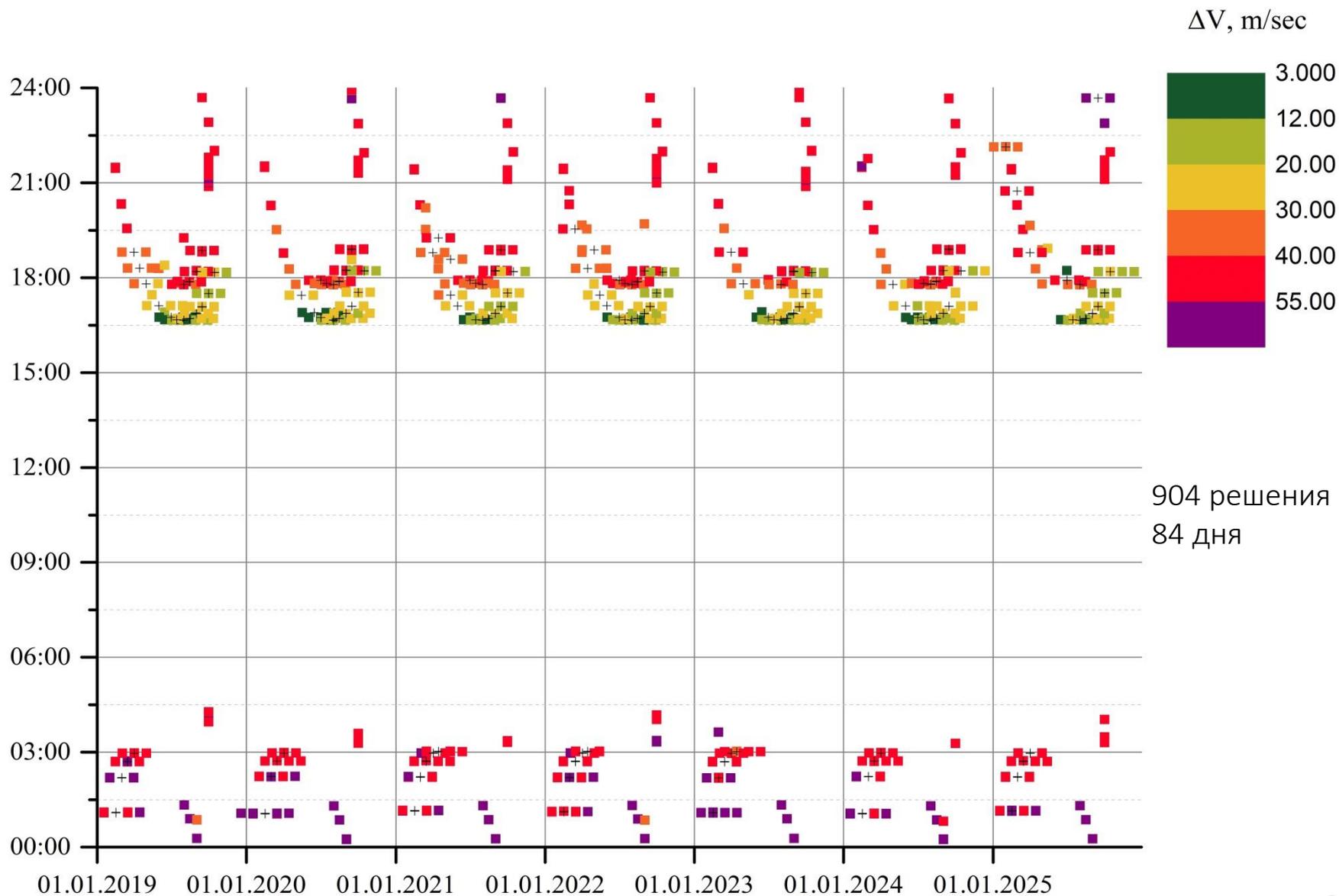
КАРТА РЕШЕНИЙ ДЛЯ МИССИИ «СПЕКТР-РГ»



КАРТА РЕШЕНИЙ ДЛЯ МИССИИ «МИЛЛИМЕТРОН» НА 2019 ГОД



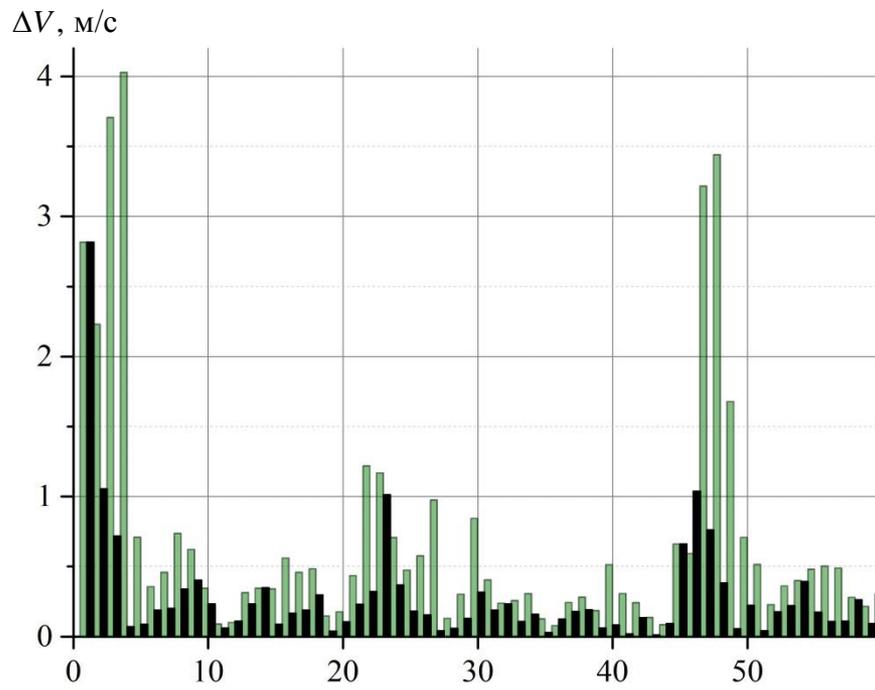
КАРТА РЕШЕНИЙ ДЛЯ МИССИИ «МИЛЛИМЕТРОН» НА 2019-2025 ГОДЫ



ОЦЕНКА ЗАТРАТ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ НА КОРРЕКЦИИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Миссия	Спектр-РГ		Миллиметрон	
	Средн, м/с	Макс, м/с	Средн, м/с	Макс, м/с
Манёвр				
1 ^{ый} МКТП	32.7	49.5	22.2	43.8
2 ^{ой} МКТП	11.0	37.4	3.3	13.5
3 ^{ий} МКТП	1.8	6.5	0.4	1.6
4 ^{ый} МКТП	1.7	14.2	1.4	3.0
Коррекции поддержания орбиты	71.3	190.5	43.2	173.1
Суммарные затраты ΔV	118.5	298.1	70.5	235.0

Ошибки выведения	
Ракета-носитель	Зенит-2СБ
Разгонный блок	Фрегат-СБ
Высота апоцентра	± 120000 км
Высота перицентра	± 12 км
Аргумент перигея	$\pm 24'$
Долгота восходящего узла	$\pm 10'$
Наклонение	$\pm 5'$



Ошибки исполнения	
По модулю	10%
По направлению	0.5°

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

Разработаны методы и алгоритмы решения следующих задач баллистического проектирования космических миссий в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля:

- поиск начального приближения для траектории перелёта на выбранный класс квазипериодических орбит на инвариантном многообразии либрационной точки L_2 ;
- построение одноимпульсных траекторий перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_2 с использованием гравитационного манёвра у Луны;
- расчёт траекторий перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_2 с заданными геометрическими характеристиками, с учётом возмущений от нецентральности поля Земли, гравитационного воздействия Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а также давления солнечной радиации;
- расчёт манёвров, реализующих эффективный сценарий удержания космического аппарата на выбранной квазипериодической орбите.

Предложенные методы и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса.

- рассчитаны множества квазипериодических орбит для проектов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон»;
- установлена структура временного и энергетического распределения траекторий перехода на квазипериодические орбиты
- получена оценка затрат характеристической скорости на обеспечение полёта в условиях наличия ошибок исполнения коррекций

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА

- И.С. Ильин, В.В. Сазонов, А.Г. Тучин. Гало-орбиты в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Космические исследования, 2014, №3, С. 201-217.
- И.С. Ильин, Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистическое проектирование траекторий перелёта с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Космические исследования, 2014, №6, С. 1-13.
- Заславский Г.С., Захваткин М.В., Ильин И.С., Корянов В.В., Самотохин А.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Я. Баллистико-навигационное обеспечение полета космического аппарата "Спектр-Р" // Космонавтика и ракетостроение, 2014, том 74, №1, С. 15-29.
- Г.К. Боровин, И.С. Ильин, Г.С. Заславский, С.М. Лавренов, В.В. Сазонов, В.А. Степаньянц, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин, В.С. Ярошевский. Математическое моделирование движения космического аппарата в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля Инженерный журнал: наука и инновации. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013, №9(21)
- G. Borovin, I. Ilin, A. Tuchin. Quasi periodic orbits in the vicinity of the Sun-Earth L_2 point and their implementation in "Spectr-RG" & "Millimetron" missions. Mathematica Montisnigri, Vol XXX, 2014.
- Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 65. 28 с.
- Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразии ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 66. 25 с.
- Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистическое проектирование траекторий перелёта с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 6. 32 с.
- Ильин И.С. Выбор номинальной орбиты ка "Миллиметрон" из семейства периодических орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 46. 21 с.